T O P O L O G I A

WPPT I, sem. letni
KOLOKWIUM II grupy A i B z ROZWIĄZANIAMI
Wrocław, 11 czerwca 2010

ZADANIE 1 a. Udowodnij, że jeśli X jest przestrzenią zwartą i U_n jest wstępującym ciągiem otwartych podzbiorów właściwych, to suma zbiorów U_n nie może być całą przestrzenią X.

ROZWIĄZANIE: Dopełnienia $F_n = U_n^c$ stanową ciąg zstępujący zbiorów domkniętych niepustych, w szczególności rodzinę scentrowaną. Zatem (ze zwartości) ich przekrój jest niepusty. Ten przekrój to dopełnienie sumy zbiorów U_n, zatem zbiory U_n nie pokrywają one całej przestrzeni.

ZADANIE 1 b. Udowodnij, że jeśli A jest zbiorem zwartym i $r = \mathrm{diam}(A)$ to istnieją punkty $x, y \in A$ takie, że $d(x, y) = r$.

ROZWIĄZANIE: Metryka $d : X \times X \to \mathbb{R}$ określona jako $(x, y) \mapsto d(x, y)$ jest zawsze funkcją ciągłą. W naszym przypadku jej dziedzina jest zwarta (jako produkt przestrzeni zwartych). Zatem $d(x, y)$ osiąga swoje supremum (a jest nim z definicji średnica $\mathrm{diam}(X)$) w jakimś punkcie dziedziny, czyli w jakiejś parze (x, y).

ZADANIE 2 a. Udowodnij, że suma dwóch rozłącznych kopii zbioru Cantora jest homeomorficzna ze zbiorem Cantora.

ROZWIĄZANIE: Przedstawmy zbiór Cantora jako zbiór ciągów $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Pierwszą kopię oznaczmy przez ,,dodatkowe" zero, a drugą przez ,,dodatkową" jedynkę. W ten sposób suma obu kopii ma postać iloczynu kartezjańskiego $\{0,1\} \times \mathfrak{C}$ czyli $\{0,1\} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, czyli $\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$. Żądany homeomorfizm polega na przenumerowaniu ciągu $(x_n)_{n \geq 0}$ indeksami zaczynającymi się od 1. Jest to homeomorfizm, gdyż zbieżność po współrzędnych nie zależy od sposobu ich numeracji.

ZADANIE 2 b. Udowodnij, że zbiór Cantora traktowany jako podzbiór przedziału $[0, 1]$ jest nigdzie gęsty.

ROZWIĄZANIE: Wiemy, że jest to zbiór domknięty, więc wystarczy pokazywać brzegowość. Załóżmy, że $\mathfrak{C}$ zawiera pewną kulę otwartą, czyli odcinek. Odcinek ten zawiera przedział postaci $[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}]$. Albo jest to ,,odcinek rzędu n" (patrz konstrukcja zbioru Cantora) albo nie. Jeśli nie, to jest on rozłączny ze zbiorem Cantora i mamy sprzeczność. Jeśli tak, to w kroku $n+1$ konstrukcji zbioru Cantora wyrzuciliśmy z tego odcinka środkowy fragment. Sprzeczność.

ZADANIE 3 a. Widząc, że zbiór Cantora jest brzegowy na prostej udowodnij, że prostej rzeczywistej nie można pokryć przeliczalną sumą przesunięć zbioru Cantora.

ROZWIĄZANIE: To wynika wprost z Twierdzenia Baire'a i faktu, że zbiór Cantora jest domknięty, a skoro w zadaniu powiedziano, że jest brzegowy, to jest on nigdzie gęsty. Przesunięcie jest homeomorfizmem całej prostej na siebie, więc każde przesunięcie zbioru Cantora jest też nigdzie gęste. Przeliczalna suma takich przesunięć jest więc zbiorem I kategorii, a więc nie może być całą przestrzenią zupełną $\mathbb{R}$.

ZADANIE 3 b. Niech X będzie przestrzenią zupełną. Udowodnij, że jeśli dopełnienie zbioru I kategorii jest zbiorem przeliczalnym to zawiera ono niepusty zbiór otwarty.

ROZWIĄZANIE: Niech A będzie zbiorem I kategorii o dopełnieniu przeliczalnym A^c. Załóżmy, że dopełnienie to nie zawiera zbioru otwartego, czyli że jest brzegowe. Zatem każdy jego podzbiór jest brzegowy. Zatem każdy pojedynczy punkt zbioru A^c jest brzegowy i jako domknięty – nigdzie gęsty. Zbiór A^c jest przeliczalną sumą takich punktów, zatem jest zbiorem I kategorii. Z tego wynika, że $X = A \cup A^C$ jest sumą dwóch zbiorów I kategorii, czyli zbiorem I kategorii. Sprzeczność z zupełnością i twierdzeniem Baire'a.

ZADANIE 4 a. Udowodnij, że jeśli X jest przestrzenią zwartą i $f : X \to Y$ jest ciągła, to obraz zbioru typu F_σ jest typu F_σ.

ROZWIĄZANIE: Niech $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ będzie zbiorem typu F_σ w X przedstawionym jako przeliczalna suma zbiorów domkniętych A_n. Zbiory A_n, jako domknięte podzbiory przestrzeni zwartej są zwarte. Ich ciągłe obrazy $f(A_n)$ też są zwarte, w szczególności domknięte (w obrazie). Stąd $f(A) = \bigcup f(A_n)$ jest typu F_σ (obraz sumy zbiorów przez dowolną funkcję jest zawsze równy sumie obrazów).

ZADANIE 4 b. Udowodnij, że dla dowolnej funkcji $f : X \to Y$ z jednej przestrzeni metrycznej w drugą, zbiór punktów ciągłości jest typu G_δ.
Wskazówka: Sprawdź, że dla ustalonego ϵ następujący warunek na $x \in X$

$$\exists_{\delta>0} \operatorname{diam} f(K(x,\delta)) \leq \epsilon$$

jest otwarty (tzn. spełniony na zbiorze otwartym).

ROZWIĄZANIE: Po pierwsze x jest punktem ciągłości, gdy

$$\forall_{\epsilon>0} \, \exists_{\delta>0} \, \forall_{x' \in X} \quad d_X(x,x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon,$$

co można równoważnie zapisać tak (przy przejściu w obie strony trzeba ϵ zastępować przez $\frac{\epsilon}{2}$:

$$\forall_{\epsilon>0} \, \exists_{\delta>0} \operatorname{diam} f(K(x,\delta)) \leq \epsilon.$$

Wystarczy brać tylko ϵ-y wymierne (albo postaci $\frac{1}{n}$), więc zbiór punktów ciągłości przedstawia się jako przeliczalny przekrój zbiorów punktów x spełniających warunek

$$\exists_{\delta>0} \operatorname{diam} f(K(x,\delta)) \leq \epsilon.$$

Zatem teraz należy zrobić to, co mówi wskazówka – pokazać, że zbiór takich x jest otwarty. Niech x spełnia ten warunek z jakimś parametrem δ. Wtedy dla x' w $K(x, \frac{\delta}{2})$ jest tak, że $K(x', \frac{\delta}{2}) \subset K(x,\delta)$, zatem $f(K(x', \frac{\delta}{2})) \subset f(K(x,\delta))$, a zatem $\operatorname{diam}(f(K(x', \frac{\delta}{2}))) \leq \operatorname{diam}(f(K(x,\delta))) \leq \epsilon$. Czyli x' spełniają ten warunek z parametrem $\frac{\delta}{2}$, no i takie x' tworzą otoczenie punktu x.

ZADANIE 5 a. Wykaż, że w przestrzeni $C([0,1])$ zbiór funkcji mających ciągłą pochodną jest I kategorii.
Wskazówka: Sprawdź, że dla ustalonego $M > 0$ zbiór funkcji Lipschitzowskich ze stałą M jest domknięty i brzegowy.

ROZWIĄZANIE: Po pierwsze, każda funkcja posiadająca ciągłą pochodną spełnia to, że jej pochodna, jako funkcja ciągła na zbiorze zwartym, jest ograniczona (co do modułu). Na przykład przez jakąś liczbę naturalną M. Czyli f jest Lipschitzowska ze stałą naturalną M. Zatem zbiór funkcji posiadających ciągłą pochodną jest zawarty w przeliczalnej sumie (po M) zbiorów funkcji Lipschitzowskich ze stałą M. Zatem wystarczy pokazać to, co mówi wskazówka. Pokażemy, że dopełnienie tego zbioru jest otwarte i gęste. Jeśli funkcja f nie spełnia warunku Lipschitza ze stałą M, to istnieją punkty x, y takie, że $|f(x) = f(y)| > M|x - y|$. Widać, że jeśli g jest bardzo blisko (w metryce supremum) funkcji f to w tych samych punktach spełnia tą samą nierówność, zatem też nie jest Lipschitzowska ze stałą M. Czyli mamy otwartość. Również widać, że dowolną funkcję ciągłą można zaburzyć w dwóch dowolnych punktach x, y odległych od siebie o $\frac{\epsilon}{2M}$ w takli sposób, by w żadnym punkcie nie zmienić wartości o więcej niż ϵ, ale żeby $|g(x) - g(y)| \geq \epsilon = 2M|x - y|$. Wtedy taka zmieniona funkcja nie jest Lipschitzowska ze stałą M, a jest blisko funkcji f. Czyli mamy gęstość.

ZADANIE 5 b. Udowodnij, że zbiór odwzorowań zbliżających $f : [0,1] \to [0,1]$ jest całkowicie ograniczony w metryce supremum.

ROZWIĄZANIE: To wynika wprost z Tw. Ascoliego-Arzeli. Takie funkcje f są jednakowo jednostajnie ciągłe (dobór δ do ϵ jest taki: $\delta = \epsilon$, czyli nie zależy on ani od funkcji ani od punktu). Poza tym funkcje te są wspólnie ograniczone (bo watrości są w przedziale $[0,1]$). A więc stanowią zbiór całkowicie ograniczony.